2019 年全国高中数学联合竞赛一试（B 卷）
参考答案及评分标准

说明：

1．评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 **8** 分和 **0** 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不得增加其他中间档次.

2．如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 **9** 小题 **4** 分为一个档次，第 **10**、**11** 小题 **5** 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 已知实数集合 $\{1,2,3,x\}$ 的最大元素等于该集合的所有元素之和，则 x 的值为____________.

答案：-3.

解：条件等价于 $1,2,3,x$ 中除最大数以外的另三个数之和为 0．显然 $x<0$，从而 $1+2+x=0$，得 $x=-3$.

2. 若平面向量 $\vec{a}=(2^m,-1)$ 与 $\vec{b}=(2^m-1,2^{m+1})$ 垂直，其中 m 为实数，则 $\vec{a}$ 的模为____________.

答案：$\sqrt{10}$.

解：令 $2^m=t$，则 $t>0$．条件等价于 $t\cdot(t-1)+(-1)\cdot 2t=0$，解得 $t=3$.

因此 $\vec{a}$ 的模为 $\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.

3. 设 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，$\cos\alpha,\cos\beta$ 是方程 $5x^2-3x-1=0$ 的两根，则 $\sin\alpha\sin\beta$ 的值为____________.

答案：$\dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

解：由条件知 $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{3}{5},\cos\alpha\cos\beta=-\dfrac{1}{5}$，从而

$$(\sin\alpha\sin\beta)^2=(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$$

$$=(1+\cos\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha+\cos\beta)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}.$$

又由 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$ 知 $\sin\alpha\sin\beta>0$，从而 $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$.

4. 设三棱锥 $P-ABC$ 满足 $PA=PB=3,AB=BC=CA=2$，则该三棱锥的体积的最大值为____________.

答案：$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

解：设三棱锥 $P-ABC$ 的高为 h．取 M 为棱 AB 的中点，则

$$h\le PM=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}.$$

当平面 PAB 垂直于平面 ABC 时，h 取到最大值 $2\sqrt{2}$．此时三棱锥 $P-ABC$ 的体

积取到最大值$\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$．

5. 将 5 个数$2, 0, 1, 9, 2019$按任意次序排成一行，拼成一个 8 位数（首位不为 0），则产生的不同的 8 位数的个数为____________．

答案：95．

解：易知$2, 0, 1, 9, 2019$的所有不以 0 为开头的排列共有$4\times 4!=96$个．其中，除了$(2, 0, 1, 9, 2019)$和$(2019, 2, 0, 1, 9)$这两种排列对应同一个数20192019，其余的数互不相等．因此满足条件的 8 位数的个数为$96-1=95$．

6. 设整数$n>4$，$(x+2\sqrt{y}-1)^n$的展开式中x^{n-4}与xy两项的系数相等，则n的值为____________．

答案：51．

解：注意到$(x+2\sqrt{y}-1)^n=\sum_{r=0}^{n}\mathrm{C}_n^r x^{n-r}(2\sqrt{y}-1)^r$．

其中x^{n-4}项仅出现在求和指标$r=4$时的展开式$\mathrm{C}_n^4 x^{n-4}(2\sqrt{y}-1)^4$中，其$x^{n-4}$项系数为$(-1)^4\mathrm{C}_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$．

而xy项仅出现在求和指标$r=n-1$时的展开式$\mathrm{C}_n^{n-1}x\cdot(2\sqrt{y}-1)^{n-1}$中，其$xy$项系数为$\mathrm{C}_n^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^2 4\cdot(-1)^{n-3}=(-1)^{n-3}2n(n-1)(n-2)$．

因此有$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=(-1)^{n-3}2n(n-1)(n-2)$．注意到$n>4$，化简得$n-3=(-1)^{n-3}48$，故只能是$n$为奇数且$n-3=48$．解得$n=51$．

7. 在平面直角坐标系中，若以$(r+1,0)$为圆心、r为半径的圆上存在一点(a,b)满足$b^2\ge 4a$，则r的最小值为____________．

答案：4．

解：由条件知$(a-r-1)^2+b^2=r^2$，故

$$4a\le b^2=r^2-(a-r-1)^2=2r(a-1)-(a-1)^2.$$

即$a^2-2(r-1)a+2r+1\le 0$．

上述关于a的一元二次不等式有解，故判别式

$$(2(r-1))^2-4(2r+1)=4r(r-4)\ge 0,$$

解得$r\ge 4$．

经检验，当$r=4$时，$(a,b)=(3,2\sqrt{3})$满足条件．因此r的最小值为4．

8. 设等差数列$\{a_n\}$的各项均为整数，首项$a_1=2019$，且对任意正整数n，总存在正整数m，使得$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_m$．这样的数列$\{a_n\}$的个数为__________．

答案：5．

解：设$\{a_n\}$的公差为d．由条件知$a_1+a_2=a_k$（k是某个正整数），则

$$2a_1+d=a_1+(k-1)d,$$

即$(k-2)d=a_1$，因此必有$k\ne 2$，且$d=\frac{a_1}{k-2}$．这样就有

$$a_n=a_1+(n-1)d=a_1+\frac{n-1}{k-2}a_1,$$

而此时对任意正整数 n，

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d=a_1+(n-1)a_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$=a_1+\left((n-1)(k-2)+\frac{n(n-1)}{2}\right)d,$$

确实为 $\{a_n\}$ 中的一项.

因此，仅需考虑使 $k-2\mid a_1$ 成立的正整数 k 的个数. 注意到 2019 为两个素数 3 与 673 之积，易知 $k-2$ 可取 $-1, 1, 3, 673, 2019$ 这 5 个值，对应得到 5 个满足条件的等差数列.

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本题满分 16 分）在椭圆 Γ 中，F 为一个焦点，A, B 为两个顶点. 若 $|FA|=3, |FB|=2$，求 $|AB|$ 的所有可能值.

解：不妨设平面直角坐标系中椭圆 Γ 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，并记 $c=\sqrt{a^2-b^2}$. 由对称性，可设 F 为 Γ 的右焦点.

易知 F 到 Γ 的左顶点的距离为 $a+c$，到右顶点的距离为 $a-c$，到上、下顶点的距离均为 a. 分以下情况讨论：

(1) A, B 分别为左、右顶点. 此时 $a+c=3, a-c=2$，故 $|AB|=2a=5$（相应地，$b^2=(a+c)(a-c)=6$，Γ 的方程为 $\frac{4x^2}{25}+\frac{y^2}{6}=1$）. …………………4 分

(2) A 为左顶点，B 为上顶点或下顶点. 此时 $a+c=3, a=2$，故 $c=1$，进而 $b^2=a^2-c^2=3$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}$（相应的 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$）.

…………………8 分

(3) A 为上顶点或下顶点，B 为右顶点. 此时 $a=3, a-c=2$，故 $c=1$，进而 $b^2=a^2-c^2=8$，所以 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{17}$（相应的 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$）.

…………………12 分

综上可知，$|AB|$ 的所有可能值为 $5, \sqrt{7}, \sqrt{17}$.　　　…………………16 分

10.（本题满分 20 分）设 a, b, c 均大于 1，满足

$$\begin{cases}\lg a+\log_b c=3,\\ \lg b+\log_a c=4.\end{cases}$$

求 $\lg a\cdot\lg c$ 的最大值.

解：设 $\lg a=x, \lg b=y, \lg c=z$，由 $a, b, c>1$ 可知 $x, y, z>0$.

由条件及换底公式知 $x+\frac{z}{y}=3, y+\frac{z}{x}=4$，即 $xy+z=3y=4x$.

…………………5 分

由此，令 $x=3t, y=4t\,(t>0)$，则 $z=4x-xy=12t-12t^2$．其中由 $z>0$ 可知 $t\in(0,1)$． ……………………10 分

因此，结合三元平均值不等式得

$$\lg a\lg c = xz = 3t\cdot 12t(1-t) = 18\cdot t^2(2-2t)$$
$$\le 18\cdot\left(\frac{t+t+(2-2t)}{3}\right)^3 = 18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{3}.$$

当 $t=2-2t$，即 $t=\dfrac{2}{3}$（相应的 a,b,c 分别为 $100, 10^{\frac{8}{3}}, 10^{\frac{8}{3}}$）时，$\lg a\lg c$ 取到最大值 $\dfrac{16}{3}$． ……………………20 分

11.（**本题满分 20 分**）设复数数列 $\{z_n\}$ 满足：$|z_1|=1$，且对任意正整数 n，均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$．证明：对任意正整数 m，均有

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|<\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

证明：归纳地可知 $z_n\ne 0\,(n\in\mathbf{N}^*)$．由条件得

$$4\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)^2+2\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)+1=0\,(n\in\mathbf{N}^*),$$

解得 $\dfrac{z_{n+1}}{z_n}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}\,(n\in\mathbf{N}^*)$． ……………………5 分

因此 $\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}\right|=\dfrac{1}{2}$，故

$$|z_n|=|z_1|\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\,(n\in\mathbf{N}^*). \qquad ①$$

进而有

$$|z_n+z_{n+1}|=|z_n|\cdot\left|1+\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left|\frac{3\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2^n}\,(n\in\mathbf{N}^*). \qquad ②$$

……………………10 分

当 m 为偶数时，设 $m=2s\,(s\in\mathbf{N}^*)$．利用②可得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\le\sum_{k=1}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|<\sum_{k=1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

……………………15 分

当 m 为奇数时，设 $m=2s+1\,(s\in\mathbf{N})$．由①、②可知

$$|z_{2s+1}|=\frac{1}{2^{2s}}<\frac{\sqrt{3}}{3\cdot 2^{2s-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\sum_{k=s+1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|,$$

故

$$|z_1+z_2+\cdots+z_m|\le\left(\sum_{k=1}^{s}|z_{2k-1}+z_{2k}|\right)+|z_{2s+1}|<\sum_{k=1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

综上，结论获证． ……………………20 分