第11届IMO真题

1. 对任意正整数 n，求证有无穷多个正整数 m 使得 $n^4 + m$ 不是质数。

2. 令 $f(x) = \cos(a_1 + x) + 1/2 \cos(a_2 + x) + 1/4 \cos(a_3 + x) + ... + 1/2^{n-1} \cos(a_n + x)$，其中 a 是实数常量，x 是实数变量。现已知 $f(x_1) = f(x_2) = 0$，求证 $x_1 - x_2$ 是 π 的整数倍。

3. 对每一个k＝1, 2, 3, 4, 5，试找出 a>0 应满足的充要条件使得存在一个四面体，其中 k 个边长均为 a， 其余 6-k 个边的长度均为 1。

4. 以 AB 为直径的半圆弧，C 是其上不同于A、B 的一点，D 是C 向AB 作垂线的垂足。K_1 是三角形ABC 的内切圆，圆K_2 与 CD、DA 以及半圆都相切，圆K_3 与 CD、DB 及半圆相切。求证：圆K_1、 K_2 、 K_3 除 AB 外还有一条公切线。

5. 平面上已给定了 n>4 个点，无三点共线。求证至少有 (n-3)(n-4)/2 个凸四边形，其顶点都是已给点集中的点。

6. 给定实数x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2，满足 $x_1 > 0$，$x_2 > 0$，$x_1y_1 > z_1^2$，$x_2y_2 > z_2^2$，求证：

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

并给出等号成立的充分必要条件。

第12届IMO真题

1. M 是三角形 ABC 的边AB 上的任何一点，r、r_1、r_2 分别是三角形 ABC、AMC、BMC 的内切圆的半径，q 是 AB 外旁切圆的半径（即与 AB 边相切，与 CA、CB 的延长线上相切的圆），类似的，q_1、q_2分别是AC、BC外旁切圆的圆心。求证：$r_1r_2q = rq_1q_2$。

2. 已知 $0 \leqslant x_i < b$，$i = 0, 1, ..., n$ 并且 $x_n > 0$，$x_{n-1} > 0$。如果 $a>b$，$x_nx_{n-1}...x_0$ 是数 A 在a 进制下的表示、也是 B 在b 进制下的表示，则 $x_{n-1}x_{n-2}...x_0$ 表示了 A'在 a 进制下的表示、B'在 b 进制下的表示。求证：A'B<AB'。

3. 实数 $a_0, a_1, a_2, ...$满足 $1 = a_0 <= a_1 <= a_2 <= ...$，并定义

$$b_n = \sum (1 - a_{k-1}/a_k)/\sqrt{a_k}$$

其中求和是k 从 1 到n。

   a. 求证$0 \leqslant b_n < 2$；
   b. 设 c 满足$0 \leqslant c < 2$，求证可找到a_n 使得当 n 足够大时$b_n > c$ 成立。

4. 试找出所有的正整数 n 使得集合 {n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5} 可被分拆成两个子集合，每个子集合的元素的乘积相等。

5. 四面体ABCD，角BDC 是直角，D 向平面ABC 作垂线的垂足恰好是三角形 ABC 的垂心。求证：$(AB + BC + CA)^2 \leqslant 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$.
并问何时等号成立？

6. 平面上给定 100 个点，无三点共线，求证：这些点构成的三角形中至多 70% 是锐角三角形。

第13届IMO真题

1. 令 $E_n = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \ldots (a_2 - a_n) + \ldots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})$. 求证 $E_n >= 0$ 对于 n=3或5成立，而对于其他自然数 n>2不成立。

2. 凸多边形 P_1 的顶点是 A_1, A_2, ... , A_9，若将顶点 A_1 平移至 A_i 时则 P_1 平移成了多边形 P_i，求证 P_1, P_2, ... , P_9 之中至少有两个具有一共同内点。

3. 求证能够找到一个由形式 $2^n - 3$ （n 是正整数）的整数构成的集合并满足任何两个元素互质。

4. 四面体 ABCD 的所有面都是锐角三角形，在线段 AB 上取一内点 X，现在 BC 上取内点 Y，CD 上取内点Z，AD 上内点T。求证：

   a. 如果 ∠DAB+∠BCD ≠ ∠CDA+∠ABC，则没有一条闭路径 XYZTX 具有最小值;
   b. 如果 ∠DAB+∠BCD = ∠CDA+∠ABC，则有无穷多最短路径 XYZTX，它们的长度是 2AC sin(k/2)，其中 k=∠BAC+∠CAD+∠DAB。

5. 对任何自然数 m ，求证存在平面上一有限点集 S，满足：对S 中的每一个点 A， 存在 S 中的恰好 m 个点与 A 的距离为单位长。

6. 设 $A = (a_{ij})$,其中 i, j = 1, 2, ... , n，是一个方阵，元素 a_{ij} 都是非负整数。若 i、j 使得$a_{ij} = 0$， 则第i 行和第j 列的元素之和 大于或等于 n。求证：该方阵中所有元素之和 大于或等于n^2/

第14届IMO真题

1. 有十个互不相同的二位数，求证必可从中选出两个不相交的子集，使得这两个子集中的元素之和相等。

2. 设 $n>4$， 求证每一个圆内接四边形都可以分割成 n 个圆内接四边形。

3. m,n 是任意非负整数，求证下式是一整数。

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

4. 试找出下述方程组的所有正实数解：

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \le 0$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \le 0$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \le 0$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \le 0$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \le 0$$

5. f、g 都是定义在实数上并取值实数的函数，并且满足方程

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y),$$

又已知 f 不恒等于 0 且 $|f(x)| \le 1$ 。求证对所有 x 同样有 $|g(x)| \le 1$ 。

6. 给定四个不相同的平行平面，求证存在一个正四面体，它的四个定点分别在这四个平面上。

第15届 IMO真题

1. OP_1，OP_2，. . . ，OP_{2n+1} 是平面上的单位向量，其中点 P_1，P_2，. . . ，P_{2n+1} 都是位于通过点O 的一条直线的同一侧，求证

$$|OP_1 + ... + OP_{2n+1}| >= 1.$$

2. 问能否在空间中找到一个不共面的有限点集M 使得，对M 中的任何两点A、B，都可以再在M 中寻找到两点C、D，而直线AB、CD 是不相同的并且是互相平行的。

3. 考虑所有这样的实数a、b 使得方程$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ 至少少有一个实根。试找出 $a^2 + b^2$ 的最小值。

4. 一个士兵需要在一个等边三角形的区域内探测有没有地雷，他的扫雷器的半径是三角形高的一半，士兵从三角形的一个定点出发，试问如果要完成任务且使行程最短他应该走什么样的路径？

5. G 是具有下述形式且非常值的函数的集合：

$$f(x) = ax + b，其中a,b,x 都是实数。$$

并且已知G 具有这些性质：

- 如果f,g 都属于G，则 $fg(x) = f(g(x))$ 也属于 G；
- 如果f 属于G，则 $f^{-1}(x) = x/a - b/a$ 也属于G；
- 对任何f 属于G，存在一个实数 x_f 使得 $f(x_f) = x_f$成立。

求证：存在实数 M 使得 f(M)=M 对所有G 中的函数f 都成立。

6. a_1，a_2，. . . ，a_n 是正实数，实数 q 满足 $0 < q < 1$，试求出n 格实数 b_1，b_2，. . . ，b_n 使得：

a. $a_i < b_i$，i = 1, 2, . . . , n;
b. $q < b_{i+1}/b_i < 1/q$， i = 1, 2, . . . , n-1;
c. $b_1 + b_2 + ... + b_n < (a_1 + a_2 + ... + a_n)(1 + q)/(1 - q)$.

第16届IMO真题

1. 三个玩家玩游戏。在三张扑克牌上分别写上一个正整数，并且每张牌上的数都不相同。在每一轮游戏中都是随机的把卡片分给这些玩家，然后每个玩家拿到所分得卡片上数目的筹码。当游戏进行时，玩家手上的筹码自然是越来越多。假设游戏至少进行了两轮以上。在最后一轮结束时，第一个玩家有筹码 20 个，第二个玩家有 10 个，第三个玩家有 9 个。又已知在最后一轮游戏中第三个玩家拿到的是最大数目的筹码。试问，在第一轮游戏中哪个玩家收到了中间数量的筹码?

2. 三角形ABC，求证在边AB 上存在一点D 使得CD 是AD、DB 的几何平均值的充要条件是

$$\sin A \sin B \le \sin^2(C/2).$$

3. 试证明对任意非负整数n，下式都不能被 5 整除：

$$\sum C(2n+1, 2k+1)2^{3k},$$

上式中的求和是 k 从 0 到n，符号 C(r,s) 表示二项式系数 r!/(s!(r-s)!)。

4. 沿着一个 8 x 8 象棋盘（黑白相间）中的线将其分割成 p 个不相交的长方形，使得每个长方形内的黑白小方格的数目一样，并且每个长方形中小方格的数量也都不一样多。求出所有可能p 值中的最大值；并对这样的最大值求出所有可能的分法（即求出那些长方形的大小）

5. a,b,c,d 是任意实数，判定下式的所有可能值：

$$a/(a+b+d) + b/(a+b+c) + c/(b+c+d) + d/(a+c+d)。$$

6. 设 P(x) 是一个指数d>0 的整系数多项式，n 是P(X)=1 或-1 的不同整根的个数， 则有n <= d + 2。

第17届IMO真题

1. 已知 $x_1 >= x_2 >= ... >= x_n$，以及 $y_1 >= y_2 >= ... >= y_n$ 都是实数，求证 若 $z_1, z_2, ..., z_n$ 是 y_i 的任意排列则有

$$\Sigma(x_i-y_i)^2 \quad <= \quad \Sigma(x_i-z_i)^2$$

上式中左右两边的求和都是 i 从1 到n。

2. 令 $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ 是一递增正整数序列，求证对所有i>=1，存在无穷多个 a_n 可以写成 $a_n = ra_i + sa_j$的形式，其中r，s是正实数且 $j > i$。

3. 任意三角形ABC 的边上，向外作三角形ABR, BCP，CAQ，使角CBP、角CAQ都是45 度 角BCP、角ACQ 都是30度 角ABR、角BAR 都是15度 求证：角QRP 是直角并且QR=RP。

4. 令 A 是将4444^{4444}写成十进制数字时的各位数字之和，令 B 时A 的各位数字之和， 求B 的各位数字之和。

5. 判定并证明能否在单位圆上找到 1975 个点使得任意两点间的距离为有理数。

6. 找出所有两个变量的多项式P(x, y)使其满足：

I. 对某一正整数n及所有实数t、x、y有$P(tx, ty) = t^nP(x, y)$成立；
II. 对所有实数x、y、z 有 $P(y + z, x) + P(z + x, y) + P(x + y, z) = 0$；
III. $P(1, 0) = 1$。

第18届IMO真题

1. 平面上一凸四边形的面积是 32，两对边与一对角线之和为 16，求另外一个对角线的所有可能的长度。

2. 令 $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_{i+1} = P_1(P_i(x))$，$i = 1, 2, 3, \ldots$，求证对任何一个正整数n，方程式 $P_n(x) = x$ 的所有根都是互不相同的实数。

3. 一个长方形的箱子可以用单位正方体完全装满，如果用体积为 2 的正方体来尽量装填，使得每个边都与箱子的边平行，则恰能装满箱子的 40%，求所有这种箱子的可能尺寸（长、宽、高）

4. 试将 1976 分解成一些正整数之和，求这些正整数乘积的最大值，并加以证明。

5. n是一个正整数，$m = 2n$，$a_{ij} = 0$、1或-1 $(1 <= i <= n, 1 <= j <= m)$ 还有 m 个未知数$x_1, x_2, \ldots, x_m$满足下面n 个方程：

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m = 0,$$

其中 $i = 1, 2, \ldots, n$。求证这n 个方程有一组不全为 0 的整数解 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 使得$|x_i| <= m$。

6. 一个序列$u_0, u_1, u_2, \ldots$ 定义为：

$$u_0 = 2,\ u_1 = 5/2,\ u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1,\ n = 1, 2, \ldots$$

求证

$$[u_n] = 2^{(2^n - (-1)^n)/3},$$

其中[x]表示不大于x 的最大整数。

第19届IMO真题

1. 在正方形ABCD 中作等边三角形ABK、BCL、CDM、DAN，证明线段KL、LM、MN、NK 的四个中点以及线段 AK、BK、BL、CL、CM、DM、DN、AN 的八个中点构成一个正十二边形的定点。

2. 在一个有限项的实数序列中，任意的相连七项之和为负，任意的相连十一项之和为正。求出这种序列最多有几项。

3. n>2 是一给定整数，V_n 是所有 1+kn 形式的整数构成的集合，其中k 是正整数，对于 V_n 中的一个数m，如果不存在V_n 中的两个数p、q 使得m=pq，则称m 是不可分解的。求证：V_n 中存在一数r，它可有多于一种的方式表示为 V_n 中不可分解数的乘积。(乘积中若仅仅是因数的顺序不同则视为是同一种分解。)

4. 定义 $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$，其中 a,b,A,B 都是实数常量。如果f(x)>=0 对所有实数x 都成立，求证

$$a^2 + b^2 <= 2 \text{ 且 } A^2 + B^2 <= 1.$$

5. a,b 是正整数，设$a^2 + b^2$除以 a + b 得到商为q，余数是r。试求出所有的正整数对（a,b）使得 $q^2 + r = 1977$。

6. f 是定义在所有正整数上且取值也是正整数的函数，求证如果 f(n+1) > f(f(n)) 对所有正整数n 都成立，则f(n) = n 对每个n 都成立。

第20届IMO真题

1. m、n 都是正整数且$n>m$。如果 1978^m 和1978^n的十进制表示法的末三位数字相同， 试求满足此条件并使$m+n$ 达到最小的m 与n。

2. P 是某已知球内部一点，A、B、C 是球面上三点，且有PA、PB、PC 相互垂直，由PA、PB、PC 决定的平行六面体与 P 点对角相向的顶点为Q，试求出Q 点的轨迹。

3. 两不交集合$\{f(1), f(2), f(3), ...\}$和$\{g(1), g(2), g(3), ...\}$的并集是全部的正整数，其中 $f(1) < f(2) < f(3) < ...$，$g(1) < g(2) < g(3) < ...$，且有$g(n) = f(f(n)) + 1$ 对所有$n=1,2,3, ...$成立。试计算$f(240)$。

4. 等腰三角形ABC，AB＝AC。在三角形ABC 的外接圆的内部有一与其相切的一个小圆，该小圆又分别与 AB、AC 相切于P、Q 两点。求证：线段 PQ 的中点恰为三角形 ABC 内切圆的圆心。

5. 令$\{a_k\}$ 为互不相同的正整数数列，求证对于所有的正整数n，有

$$\sum a^{k}/k^{2} >= \sum 1/k;$$

上式中两边的求和都是 k 从 1 到n。

6. 某国际组织共有来自六个国家的共1978名会员，会员编号分别是1,2，...,1978。求证至少有某一会员的编号，恰为与他同国家的另外两位会员编号的和，或者是他同国家的另外一名会员的编号的两倍。